A Dictionary of Modular Threefolds

Christian Meyer

29.4.2005

1. Threefolds?
2. Modular?
3. Dictionary?

Algebraische Geometrie

Algebra $\leftrightarrow$ Nullstellenmengen von Systemen polynomieller Gleichungen

	Variablen	Gleichungen	Grad	Objekte
Lin. Algebra	viele	viele	1	Vektorräume
Galoistheorie	1	1	n	Punkte, Gruppen
Algebraische Geometrie	viele	viele	n	Varietäten

Varietäten sind **geometrische** Objekte.

- Varietäten über verschiedenen Körpern

$\mathbb{R}$	:	Bilder
$\mathbb{C}$	:	schöne Ergebnisse
$\mathbb{Q}$	:	„rationale Lösungen“, Anwendung
$\mathbb{F}_p$	:	endliche Varietäten

- Affine alg. Geometrie in $\mathbb{K}^n$ $\quad\leftrightarrow\quad$ Projektive alg. Geometrie in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$
- Invarianten: Dimension, Grad, Bettizahlen, Hodgezahlen, . . .
- Threefold: Dimension $= 3$.

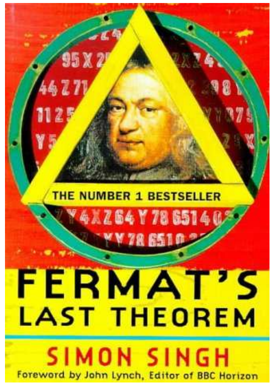
Modularität

- **Modulform** vom **Gewicht** $k \in \mathbb{N}$ und **Level** (Stufe) $N \in \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

für alle $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit $c \equiv 0 \mod N, \quad \tau \in \mathbb{H}.$

- Wiles et al.: Elliptische Kurven sind **modular**: $p + 1 - \#E_p = a_p$ für fast alle p, wobei a_p die Fourier-Koeffizienten einer gewissen Modulform vom Gewicht 2 und Level $N = \mathrm{Cond}(E)$ sind.



- Frey et al.: $\Longrightarrow$ Fermats letzter Satz

- Elliptische Kurve $\simeq$ Calabi–Yau–Varietät der Dimension 1
- K3–Fläche $\simeq$ Calabi–Yau–Varietät der Dimension 2
- Calabi–Yau Threefold $\simeq$ Calabi–Yau–Varietät der Dimension 3
- Vermutung: Calabi–Yau–Varietäten sind modular.
- Dimension 3, Calabi–Yau Threefold X:

  $h^{2,1}(X) \simeq$ Anzahl Deformationen von X; $\quad h^{2,1}(X) = 0 \iff: X$ starr

  $h^{1,1}(X) = \mathrm{Rang}(\mathrm{Pic}(X))$ zählt Divisoren auf X.
- Vermutung: X starr $\implies \#X_p$ bestimmt durch Koeffizienten einer Modulform vom Gewicht 4 und gewissem Level N

Rezept für Modularitätsbeweise

1. Geg.: Calabi–Yau Threefold X durch Gleichungen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$
2. Untersuche Singularitäten von X.
3. Löse Singularitäten auf, z.B. durch Aufblasen $\rightsquigarrow$ glattes Modell $\tilde{X}$ von X.
4. Bestimme $h^{1,1}(\tilde{X})$, $h^{2,1}(\tilde{X})$. Lefschetzscher Fixpunktsatz:

$$\#\tilde{X}_p = p^3 + 1 + k_p \cdot (p^2 + p) - t_p$$

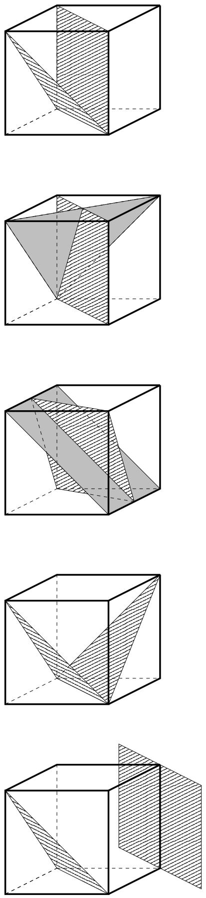
5. Bestimme $\#\tilde{X}_p$ mit dem Computer.
6. Vergleiche t_p mit Koeffizienten von Modulformen.
7. eventuell: Beweise Modularität (z.B. à la Serre–Livné–Faltings).

Beispiele für Calabi–Yau Threefolds

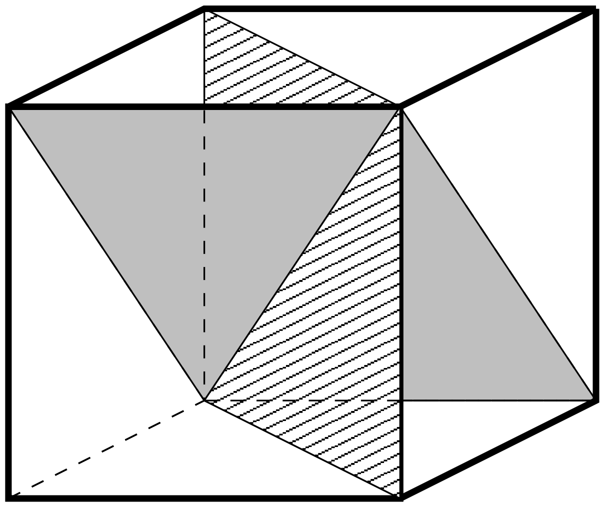
1. Quintik in $\mathbb{P}^4$ $\quad 5 = 4 + 1$
2. Durchschnitt zweier Kubiken in $\mathbb{P}^5$ $\quad 3 + 3 = 5 + 1$
3. Durchschnitt einer Quartik und einer Quadrik in $\mathbb{P}^5$ $\quad 4 + 2 = 5 + 1$
4. Durchschnitt einer Kubik und zweier Quadriken in $\mathbb{P}^6$ $\quad 3 + 2 + 2 = 6 + 1$
5. Durchschnitt von vier Quadriken in $\mathbb{P}^7$ $\quad 2 + 2 + 2 + 2 = 7 + 1$
6. Doppel–Oktiken:

   8 Ebenen, 6 Ebenen $+$ Quadrik, 4 Ebenen $+$ 2 Quadriken, ...

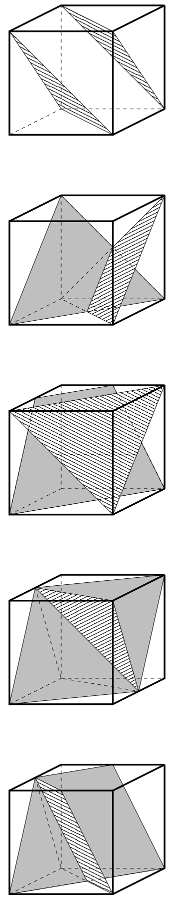
   Arrangements: sehen lokal aus wie eine Vereinigung von Ebenen



Starre Doppel-Oktiken



$$u^2 = xyzt(x+y)(y+z)(z+t)(t+x)$$



Aus dem Dictionary

- Von 50 auf 1000 Beispiele in 4 Jahren
- Schlechte Primzahlen in Levels: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 37, 73
- Maximale Potenzen in Levels: 2^8, 3^5, p^2
- „Faustregel“:

$p^2 \mid N$ $\rightsquigarrow$ nicht–isolierte Singularitäten über $\mathbb{F}_p$

$p \mid N$, $p^2 \nmid N$ $\rightsquigarrow$ isolierte Singularitäten über $\mathbb{F}_p$

$p \nmid N$ $\rightsquigarrow$ glatt über $\mathbb{F}_p$

Interessante Projekte

- Beispiele mit großen schlechten Primzahlen
- Korrespondenzen
- Modularitätsbeweis für alle *starren* Calabi–Yau Threefolds
- Welche Möglichkeiten gibt es für nicht–starre Calabi–Yau Threefolds?
- z.B.: Untersuche Beispiele mit $h^{2,1} = 1$
- Modularitätsbeweis für *alle* Calabi–Yau Threefolds
- Anwendungen in der Physik
- Dimension 2, 4, 5, . . .